2023.M29T

2023L003A1IL

Coimisiún na Scrúduithe Stáit
State Examinations Commission

# Scrúdú na hArdteistiméireachta, 2023

# Matamaitic

## Páipéar 1

## Ardleibhéal

Dé hAoine 9 Meitheamh    Tráthnóna 2:00 - 4:30

300 marc

| | |
|---|---|
| **Scrúduimhir** | |
| **Lá agus Mí do Bhreithe** | Scríobh 3 Feabhra mar 0302, mar shampla |
| **Stampa an Ionaid** | |

Rinneadh coigeartuithe ar scrúdpháipéir 2023 d'fhonn aon chur isteach ar an bhfoghlaim a tharla de bharr COVID-19 a chúiteamh. D'fhéadfadh sé nach bhfuil an struchtúr agus an leagan amach céanna ar an scrúdpháipéar seo is a bhí ar scrúdpháipéir i mblianta eile roimhe nó ina dhiaidh seo.

Ná scríobh ar an leathanach seo

## Treoracha

Tá **dhá** roinn sa scrúdpháipéar seo.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Roinn A | Coincheapa agus Scileanna | 150 marc | 6 cheist |
| Roinn B | Comhthéacsanna agus Feidhmeanna | 150 marc | 4 cheist |

Freagair ceisteanna mar a leanas:

- **cúig cheist ar bith** as Roinn A – Coincheapa agus Scileanna
- **trí cheist ar bith** as Roinn B – Comhthéacsanna agus Feidhmeanna.

Scríobh do Scrúduimhir sa bhosca ar an gclúdach tosaigh.

Scríobh do chuid freagraí le peann gorm nó le peann dubh.
Is féidir leat peann luaidhe a úsáid i gcás graf agus léaráidí amháin.

Déanfar an leabhrán scrúdaithe seo a scanadh agus is ar scáileán a chuirfear do chuid oibre i láthair an scrúdaitheora. Mar sin is féidir nach bhfeicfidh an scrúdaitheoir aon rud a scríobhfaidh tú taobh amuigh de bhoscaí na bhfreagraí.

Scríobh na freagraí go léir sa leabhrán seo. Tá spás d'obair bhreise ag cúl an leabhráin.
Má bhaineann tú úsáid as, lipéadaigh aon obair bhreise go soiléir le huimhir na ceiste agus leis an gcuid den cheist.

Tabharfaidh an feitheoir cóip den leabhrán *Foirmlí agus Táblaí* duit. Caithfidh tú é a thabhairt ar ais ag deireadh an scrúdaithe. Níl cead agat do chóip féin a thabhairt isteach sa scrúdú.

Ní de réir scála a bhíonn léaráidí, de ghnáth.

Caillfidh tú marcanna mura mbíonn obair thacaíochta ábhartha san áireamh agat i do réitigh.

Is féidir go gcaillfidh tú marcanna mura dtugann tú na haonaid tomhais chuí sna freagraí, de réir mar a oireann.

Is féidir go gcaillfidh tú marcanna mura dtugann tú na freagraí san fhoirm is simplí, de réir mar a oireann.

Scríobh déanamh agus múnla d'áireamhá(i)n anseo:

## Roinn A Coincheapa agus Scileanna 150 marc

Freagair **cúig cheist ar bith** as an roinn seo.

**Ceist 1** **(30 marc)**

**(a)** Faigh an dá luach ar $m \in \mathbb{R}$ a fhágann go bhfuil $|5 + 3m| = 11$.

**(b)** Le haghaidh na n-uimhreacha réadacha $h$, $j$, agus $k$:

$$\frac{1}{h} = \frac{k}{j + k}$$

Scríobh $k$ i dtéarmaí $h$ agus $j$.

**(c)** Tá $x^2 - px + 1$ ina fhachtóir ag $x^3 - 2x - 3r$, áit a bhfuil $p, r \in \mathbb{R}$ agus $p < 0$.

Faigh luach $p$ agus luach $r$.

$p =$ ____________ agus $r =$ ____________

**Ceist 2** **(30 marc)**

**(a)** $f(x) = x^2 + bx + c$, áit a bhfuil $b, c \in \mathbb{R}$.
Tá íosphointe logánta ag $f(x)$ ag $(3, -1)$.

Faigh luach $b$ agus luach $c$.

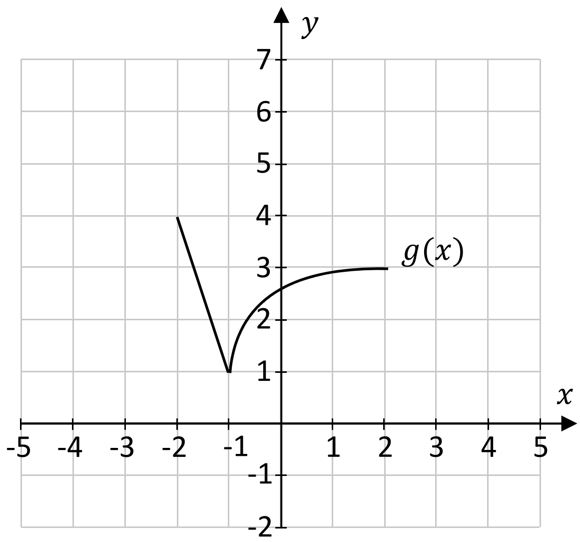
$b =$ ____________ agus $c =$ ____________

**(b)** Faigh luach na teorann seo a leanas, áit a bhfuil $n \in \mathbb{N}$:

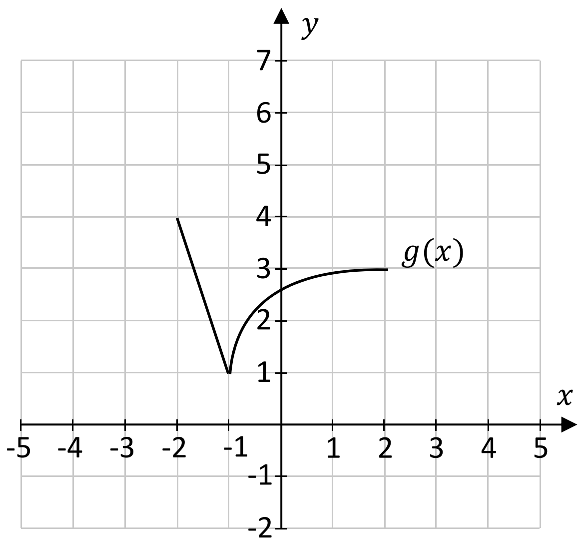
$$\lim_{n\to\infty} \left[ \frac{n}{n+1} + \frac{n+1000}{n} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \right]$$

**(c)** Sainítear an fheidhm $g(x)$ le haghaidh $-2 \leq x \leq 2, x \in \mathbb{R}$.
Taispeántar a graf sa dá cheann de na léaráidí thíos.

**(i)** Ar an léaráid chomhordanáideach thíos, tarraing graf $g(x) - 2$ le haghaidh $x \in \mathbb{R}$, i bhfearann chomh mór agus is féidir.




**(ii)** Ar an léaráid chomhordanáideach thíos, tarraing graf $g(x + 3)$, le haghaidh $x \in \mathbb{R}$, i bhfearann chomh mór agus is féidir.



**Ceist 3** **(30 marc)**

**(a)** Cruthaigh **nach** uimhir chóimheasta $\sqrt{2}$.

**(b)** Is réaduimhir dheimhneach $t$, áit a bhfuil:

$$\log_3 t + \log_9 t + \log_{27} t + \log_{81} t = 10$$

Faigh luach $t$. Bíodh do fhreagra san fhoirm $3^r$, áit a mbeidh $r \in \mathbb{Q}$.

*Leid*: bain úsáid as an bhfoirmle $\log_a b = \dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

**(c)** **(i)** Mínigh cad is ciall le $\log_6 m$, áit ar réaduimhir dheimhneach $m$.

**(ii)** Is réaduimhir $m$, agus $m > 6$.

Cén t-eolas a thugann sé seo faoi luach $\log_6 m$?

**Ceist 4** **(30 marc)**

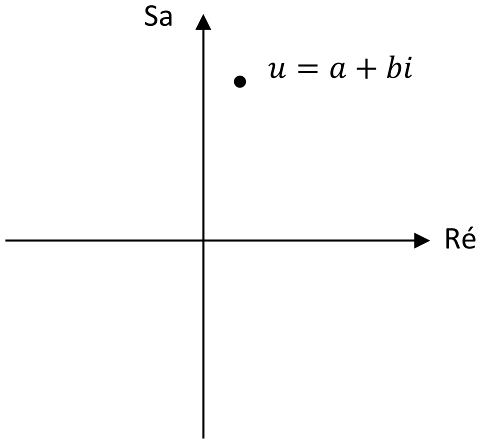
Sa cheist seo, $i^2 = -1$.

**(a)** Is fréamh den chothromóid $z^2 + (3 - 2i)z + p = 0$ í an uimhir choimpléascach $z_1 = 1 + i$.

Faigh luach $p$, áit a mbeidh $p = a + bi$, agus $a, b \in \mathbb{Z}$.

**(b)** Úsáid **Teoirim De Moivre** chun na luachanna ar $w$ a fhágann go bhfuil $w^2 = -1 + \sqrt{3}i$ a fháil. Bíodh gach luach ar $w$ san fhoirm $a + bi$, agus $a, b \in \mathbb{R}$.

**(c)** I léaráid Argand thíos, taispeántar an uimhir choimpléascach $u = a + bi$, áit a bhfuil $a, b \in \mathbb{R}$.




**(i)** Scríobh na huimhreacha coimpléascacha $iu$ agus $\overline{iu}$ san fhoirm is simplí, i dtéarmaí $a$ agus $b$, áit arb é $\overline{iu}$ comhchuingeach coimpléascach $iu$.

$iu$:

$\overline{iu}$:

**(ii)** **Breac** agus **lipéadaigh** na huimhreacha coimpléascacha $iu$ **agus** $\overline{iu}$ ar an léaráid thuas, chomh beacht agus is féidir.

**(iii)** Luaigh claochlú, nó sraith de chlaochluithe, a chuirfeadh $u$ go dtí $\overline{iu}$.
**Ná bíodh** aistriú san áireamh i do fhreagra.

**Ceist 5** **(30 marc)**

**(a)** Sainítear an fheidhm $f$ mar a leanas, le haghaidh $x \in \mathbb{R}$:

$$f(x) = \frac{1}{5x^2 + 7}$$

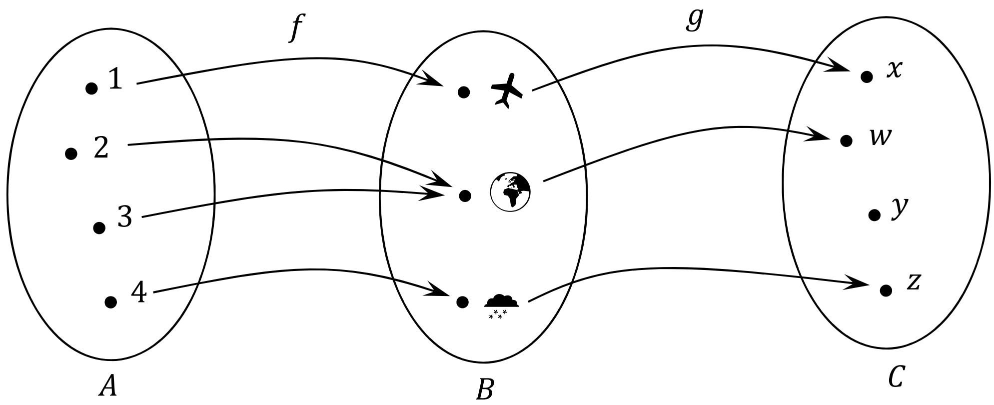
Faigh $f'(x)$, díorthach $f$. Bíodh do fhreagra san fhoirm is simplí.

**(b)** Sainítear an fheidhm $g(x)$ mar seo a leanas, le haghaidh $x \in \mathbb{R}$, $0 < x < \pi$:

$$g(x) = \left(\tan\left(\frac{x}{2}\right)\right)(\ln x)$$

Faigh luach $g'\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Bíodh do fhreagra san fhoirm $a + \ln b$, áit a mbeidh $a, b \in \mathbb{R}$.

**(c)** Sa léaráid thíos, taispeántar trí thacar, $A$, $B$, agus $C$, agus dhá fheidhm, $f$ agus $g$, áit a bhfuil $f: A \to B$ agus $g: B \to C$. $\#A = \#C = 4$ agus $\#B = 3$.




**(i)** Faigh luach $g\big(f(3)\big)$.

**(ii)** Mínigh cén fáth a bhfuil $g: B \to C$ inteilgeach ach **nach** bhfuil sé barrtheilgeach (is é sin, ina mhapáil aon le haon ach **gan a bheith** ina mhapáil ar).

Inteilgeach:

Níl sé barrtheilgeach:

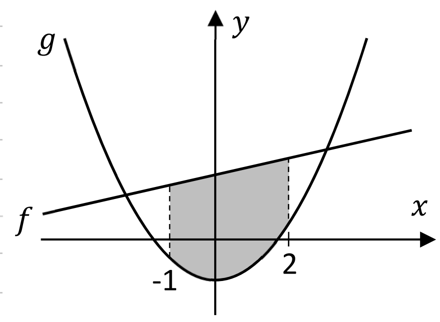
**Ceist 6** **(30 marc)**

**(a)** Is dhá fheidhm de $x \in \mathbb{R}$ iad $f$ agus $g$, áit a bhfuil:

$$f(x) = x + 4$$
$$g(x) = x^2 - 2$$

**(i)** Faigh an dá luach ar $x$ a fhágann go bhfuil $f(x) = g(x)$.

**(ii)** Faigh **achar** an réigiúin scáthaithe sa léaráid thíos (nach bhfuil de réir scála), an réigiún idir graf $f(x) = x + 4$ agus graf $g(x) = x^2 - 2$, ó $\boldsymbol{x = -1}$ go dtí $\boldsymbol{x = 2}$.



**(b)** Is tairiseach deimhneach é $b \in \mathbb{R}$, agus:

$$\int_{0}^{b} b\, e^{bx}\, dx = e$$

Oibrigh amach luach $b$.

| Roinn B | Comhthéacsanna agus Feidhmeanna | 150 marc |
|---|---|---|

Freagair **trí cheist ar bith** as an roinn seo.

**Ceist 7** **(50 marc)**

Tá Fiona ag tiomáint ar mhótarbhealach. Gabhann sí thar phointe **A** ar an mótarbhealach.
Tugtar a luas de réir:

$$v(t) = \frac{2}{3}t^3 - 6t^2 + 13t + 109$$

áit arb é $v$ a luas ina km/uair $t$ nóiméad tar éis di gabháil thar phointe **A**, le haghaidh $0 \leq t \leq 5$ agus $t \in \mathbb{R}$.

**(a)** Oibrigh amach luas Fhiona nuair a ghabhann sí thar phointe **A**.

**(b)** Oibrigh amach luasghéarú Fhiona (is é sin an ráta ar a bhfuil a luas ag méadú) $5$ nóiméad tar éis di gabháil thar phointe **A**. Bíodh do fhreagra ina km/uair in aghaidh an nóiméid.

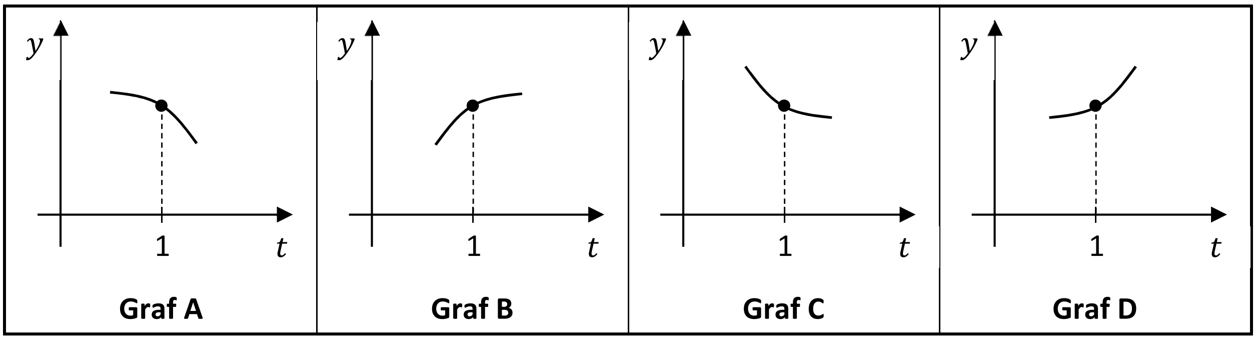
**(c)** Faigh an t-am (an luach ar $t$) a mbaineann Fiona a huasluach amach, le linn na chéad $4$ nóiméad tar éis di gabháil thar phointe **A**. Bíodh do fhreagra ceart go dtí 2 ionad dheachúlacha.

**(d)** Úsáid an tsuimeáil chun meánluas Fhiona in imeacht na 5 nóiméad tar éis di gabháil thar phointe **A** a oibriú amach. Bíodh do fhreagra ceart go dtí 2 ionad dheachúlacha.

**(e)** Agus tú ag glacadh le $v'(t)$ mar dhíorthach $v$, agus le $v''(t)$ mar an dara díorthach de $v$:

$$v'(1) > 0 \text{ agus } v''(1) < 0$$

Taispeántar ceithre ghraf, **A**, **B**, **C**, agus **D**, thíos.




Gar don áit a bhfuil $t = 1$, ní mór do ghraf $y = v(t)$ a bheith cosúil le ceann amháin de na ceithre ghraf a thugtar thuas. Breac síos cé acu graf é sin. Cosain do fhreagra agus úsáid á baint agat as $v'(1)$ **agus** $v''(1)$ araon.

Freagra (**A**, **B**, **C**, nó **D**):

Ag úsáid $v'(1) > 0$:

Ag úsáid $v''(1) < 0$:

*Leantar den cheist seo ar an gcéad leathanach eile*

Tá **Limistéar Meán-Luais** ar an mótarbhealach, ag tosú ag pointe **A** agus ag críochnú ag pointe **B**.
Is é 10 km an fad ó **A** go dtí **B** feadh an mhótarbhealaigh.
Taifeadann ceamaraí an t-am a thógann sé ar gach carr taisteal ó phointe **A** go dtí pointe **B**.
Ríomhtar meánluas gach cairr ó **A** go dtí **B** ansin.

**(f)** Oibrigh amach an t-am **íosta**, ina nóiméid, a ghlacfadh sé ar thiománaí dul ó **A** go dtí **B** agus gan é a bheith ag tiomáint os cionn 100 km/uair.

**(g)** Tiomáineann Rohan ó **A** go dtí **B**.

Gabhann sé thar phointe **A** agus é ag tiomáint ar luas tairiseach 120 km/uair.
Tar éis a bheith ag tiomáint ar an luas seo ar feadh 2 nóiméad, tosaíonn sé ag luasmhoilliú (ag laghdú a luais) ar ráta tairiseach, go dtí go sroicheann sé pointe **B**. Ar an iomlán, is é 100 km/uair a mheánluas agus é ag tiomáint ó **A** go dtí **B**.

Oibrigh amach luasmhoilliú Rohan. Bíodh do fhreagra ina km/uair in aghaidh an nóiméid.

**Ceist 8** **(50 marc)**

Tá cuntais bhainc ag Olga, Chen, Fiona, agus Rohan go léir.

**(a)** Cuireann Olga €$3000$ i gcuntas coigiltis. Cuirtear ús leis gach bliain ar ráta $2{\cdot}4\%$ in aghaidh na bliana. Oibrigh amach an tsuim i gcuntas Olga tar éis $5$ bliana, ceart go dtí an cent is gaire.

**(b)** **(i)** Mínigh cad is brí leis an "luach láithreach" ar íocaíocht €$1000$ i gceann $1$ bhliain, ar ráta úis áirithe.

**(ii)** Cuireann Chen suim dhifriúil i gcuntas coigiltis a bhfuil an ráta úis céanna ($2{\cdot}4\%$ in aghaidh na bliana) aige. Tá €$4000$ i gcuntas Chen tar éis $6$ bliana.

Oibrigh amach cé mhéad airgid a chuir Chen sa chuntas i dtosach báire, ceart go dtí an cent is gaire.

*Leantar den cheist seo ar an gcéad leathanach eile*

**(c)** Tá iasacht á tógáil amach ag Fiona ar an ráta úis bliantúil céanna ($2{\cdot}4\%$ in aghaidh na bliana). Déanann Fiona íocaíochtaí in aghaidh na ráithe (is é sin, $4$ huaire in aghaidh na bliana). Oibrigh amach an ráta úis in aghaidh na ráithe a bheadh cóibhéiseach le APR $2{\cdot}4\%$. Bíodh do fhreagra ina **chéatadán**, ceart go dtí $2$ ionad dheachúlacha.

**(d)** Teastaíonn ó Rohan an tsuim airgid chéanna a chur i gcuntas coigiltis ag tús gach míosa ar feadh $36$ mí, i dtreo go mbeidh €$12\ 000$ san iomlán sa chuntas aige ag deireadh 3 bliana. Ríomhtar ús ar ráta $0{\cdot}11\%$ in aghaidh na míosa.

**(i)** Glac leis gurb é €$A$ an tsuim a chuireann Rohan ina chuntas ag tús gach míosa, agus scríobh síos sraith iolraíoch in €$A$ chun an tsuim iomlán sa chuntas ag deireadh na $3$ bliana a thaispeáint. Bíodh an chéad dá théarma agus an dá théarma deiridh san áireamh agat.

**(ii)** Uaidh sin, faigh an luach ar €$A$ a thabharfaidh suim iomlán €$12\ 000$ sa chuntas tar éis $3$ bliana. Bíodh do fhreagra ceart go dtí an cent is gaire.

**(e)** Díoltar trí chineál ticéad i bpáirc: páiste, mac léinn, agus duine fásta. Sa tábla thíos, tugtar eolas maidir le praghas gach ticéid agus céatadán na dticéad a díoladh.
Mar shampla, is ticéid do mhic léinn iad $15\%$ de na ticéid go léir a dhíoltar.

| An Cineál ticéid | Páiste | Mac léinn | Duine fásta |
|---|---|---|---|
| **Praghas an ticéid** | €$11$ | €5 níos lú ná ticéad do dhuine fásta | € $x$ |
| **An Céatadán** | $52\%$ | $15\%$ | $33\%$ |

Is é an luach ionchais ar phraghas ticéid ná €$13{\cdot}85$.
Oibrigh amach luach $x$, an praghas ar thicéad do dhuine fásta.

**(f)** Nuair a bhíonn earra á dhíol:

- is é an **mharcáil suas** an brabús mar chéatadán den chostphraghas, agus
- is é an **corrlach** an brabús mar chéatadán den phraghas díola.

Díoltar earra i siopa le **corrlach** $18\%$. Oibrigh amach an **mharcáil suas** ar an earra seo. Bíodh do fhreagra ina chéatadán, ceart go dtí an céatadán is gaire.

**Ceist 9** **(50 marc)**

Tá fachtóirí uimhreacha éagsúla á n-iniúchadh ag Ava.

**(a)** Ar dtús, féachann sí ar uimhreacha is féidir a scríobh mar chumhachtaí d'uimhir phríomha.

**(i)** Liostaigh na $5$ fhachtóir éagsúla atá ag $2^4$.
Is féidir gach ceann díobh a scríobh mar chumhacht de $2$.

**(ii)** Oibrigh amach cé mhéad fachtóir éagsúil atá ag $3^7$.

**(iii)** Oibrigh amach cé mhéad fachtóir éagsúil atá ag $2^{10} \times 3^{12}$.

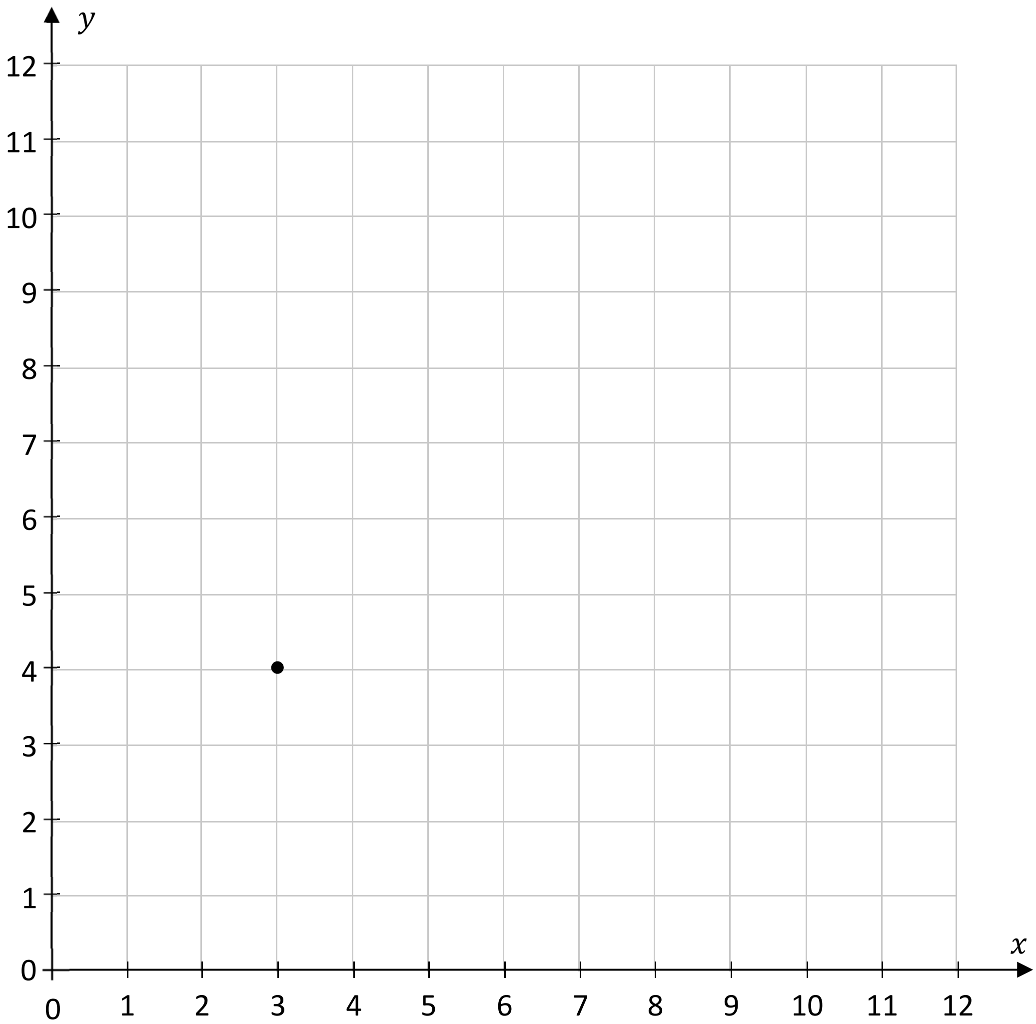
Breathnaíonn Ava freisin ar an gcoibhneas idir péirí d'fhachtóirí uimhreach.

**(b)** Déanann sí tábla chun na péirí fachtóirí atá ag 12 a thaispeáint (is e sin, na péirí d'uimhreacha nádúrtha $x$ agus $y$, áit a bhfuil $xy = 12$).

**(i)** Comhlánaigh an tábla thíos, chun na 6 phéire fachtóirí ($x$ agus $y$) atá ag 12 a thaispeáint.

| $x$ | 1 | 2 | 3 | | 6 | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | | | 4 | | | 1 |

**(ii)** Breac na 6 phointe thuas ar an léaráid chomhordanáideach thíos.
Taispeántar ceann amháin de na pointí.




**(iii)** Tugann Ava faoi deara gurb é an coibhneas atá idir $x$ agus $y$ ná $y = \frac{12}{x}$.

Ar an léaráid chomhordanáideach thuas, **tarraing** graf $y = \frac{12}{x}$ le haghaidh $x \in \mathbb{R}$, san fhearann $1 \le x \le 12$.

*Leantar den cheist seo ar an gcéad leathanach eile.*

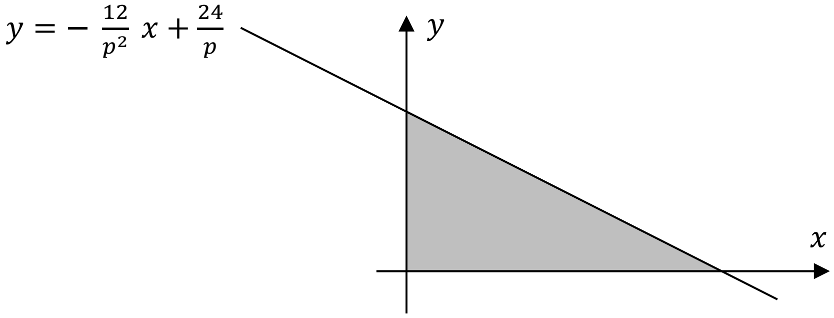
**(c)** **(i)** Tarraingítear tadhlaí leis an gcuar $y = \frac{12}{x}$ ag an bpointe $\left(p,\ \frac{12}{p}\right)$, áit a bhfuil $p \in \mathbb{R}$ agus $p > 0$.

Taispeáin gurb é cothromóid an tadhlaí seo ná:

$$y = -\frac{12}{p^2}x + \frac{24}{p}$$

**(ii)** Is é **achar an triantáin** a fhoirmítear idir an $x$-ais, an $y$-ais, agus an tadhlaí $y = -\frac{12}{p^2}x + \frac{24}{p}$ ná $k$ aonad cearnach i gcónaí, áit ar tairiseach é $k \in \mathbb{N}$.

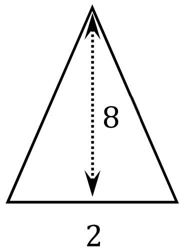
Oibrigh amach luach $k$.




$k =$ ____________

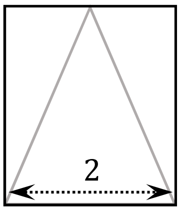
**Ceist 10** **(50 marc)**

Tá bonn triantáin 2 aonad ar fad agus is é 8 aonad an airde ingearach atá sa triantán, mar a thaispeántar sa léaráid ar dheis.

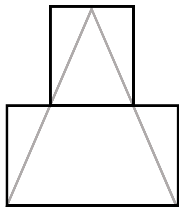



Sna léaráidí thíos, taispeántar $T_1$, $T_2$, agus $T_3$, na chéad trí chruth i seicheamh cruthanna atá bunaithe ar an triantán seo.

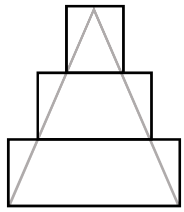
Le haghaidh gach luacha ar $n \in \mathbb{N}$, déantar cruth $T_n$ de $n$ dronuilleog atá ar comhairde agus atá leagtha anuas ar a chéile. Is é $T_n$ an tiomsú de na dronuilleoga is lú dá leithéid a chlúdaíonn an triantán go hiomlán.




$T_1$
1 dronuilleog amháin

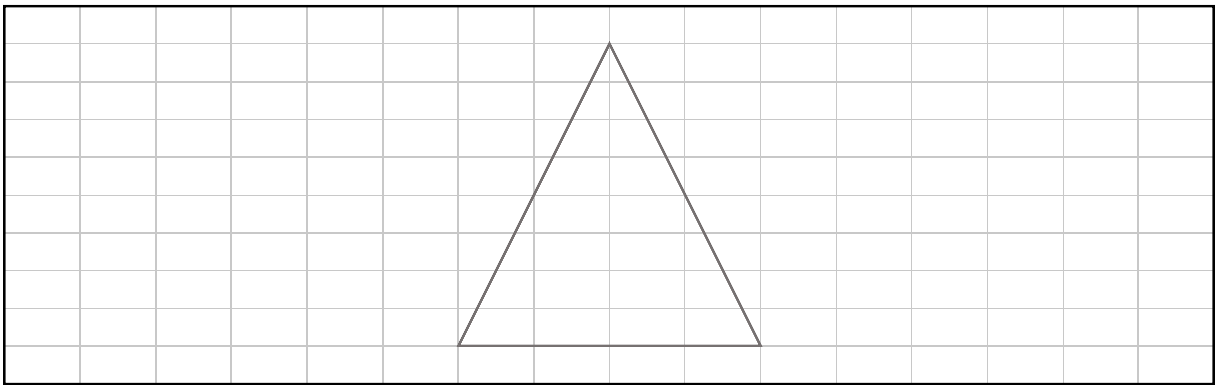


$T_2$
2 dhronuilleog atá ar comhairde



$T_3$
3 dhronuilleog atá ar comhairde

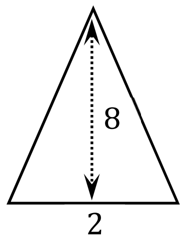
**(a)** Sa ghreille thíos, tarraing $T_4$, bunaithe ar an triantán a thugtar ar an ngreille.



**(b)** Taispeáin gurb é **achar iomlán** na dtrí dhronuilleog in $T_3$ ná $\frac{32}{3}$ aonad chearnacha.

**(c)** Faigh **achar iomlán** na $n$ dronuilleog in $T_n$ , le haghaidh $n \in \mathbb{N}$.
Bíodh do fhreagra ina aonaid chearnacha i dtéarmaí $n$, san fhoirm is simplí.

**(d)** Is mar a leanas atá achar iomlán na ndronuilleog san $n$ ú téarma de sheicheamh **difriúil** de ghrúpaí de dhronuilleoga, le haghaidh $n \in \mathbb{N}$:



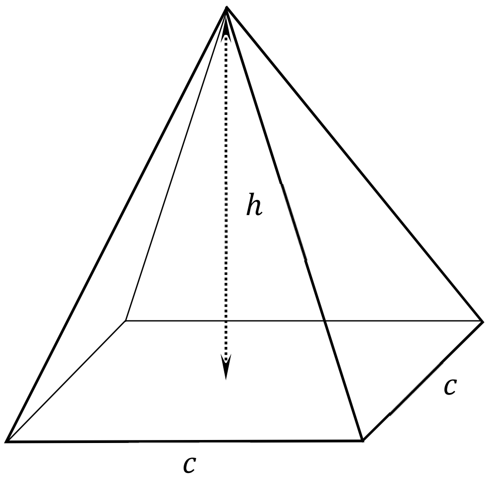

$$\text{Achar iomlán} = A_n = \frac{8\,(n-1)}{n}$$

Oibrigh amach an chéad luach ar $n$ a fhágann go bhfuil $A_n$ **níos mó ná** $95\%$ d'achar an triantáin ar dheis.

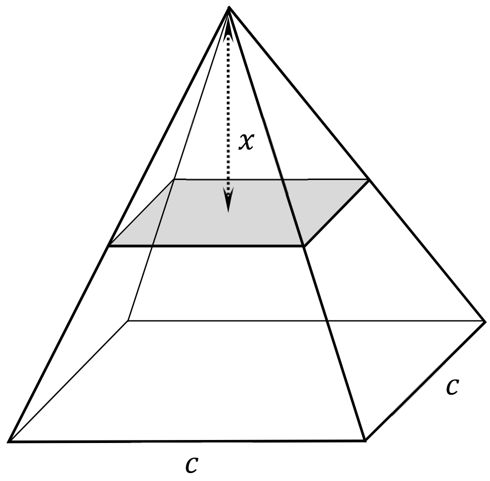
*Leantar de cheist seo ar an gcéad leathanach eile.*

**(e)** I **Léaráid A** thíos, taispeántar pirimid ar bhonn cearnógach a bhfuil $c$ aonad i bhfad na sleasa ar an mbonn. Tá bonn na pirimide cothrománach, agus is é $h$ aonad a hairde ingearach (áit a bhfuil $c, h \in \mathbb{R}$).

I **Léaráid B** thíos taispeántar an phirimid chéanna. Taispeántar freisin cearnóg chothrománach atá suite laistigh den phirimid, fad $x$ aonad anuas ó bharr na pirimide, áit a bhfuil $x \in \mathbb{R}$, $0 < x < h$.




**Léaráid A**




**Léaráid B**

Is é achar na cearnóige scáthaithe i **Léaráid B** ná $S(x) = \dfrac{x^2\, c^2}{h^2}$ .

**(i)** Is é toirt na pirimide ná $\int_0^h S(x)\, dx$.

Úsáid an tsuimeáil chun toirt na pirimide a fháil ina aonaid chiúbacha, i dtéarmaí $c$ agus $h$.

**(ii)** Tosaíonn $x$ ag méadú ar ráta 3 aonad sa tsoicind.
Tá sin ina chúis le $S(x)$ a bheith ag méadú freisin.

Faigh ráta athraithe $S(x)$ i gcoibhneas leis an am ag an meandar arb ionann $x$ agus leath d'airde ingearach na pirimide. Bíodh do fhreagra ina aonaid chearnacha in aghaidh an tsoicind, i dtéarmaí $c$ agus $h$.

Leathanach le haghaidh obair bhreise.
Lipéadaigh aon obair bhreise go soiléir le huimhir na ceiste agus leis an gcuid den cheist.

Leathanach le haghaidh obair bhreise.
Lipéadaigh aon obair bhreise go soiléir le huimhir na ceiste agus leis an gcuid den cheist.

Ná scríobh ar an leathanach seo

**Fógra cóipchirt**
D'fhéadfadh sé go bhfuil téacsanna nó íomhánna sa scrúdpháipéar seo nach é Coimisiún na Scrúduithe Stáit úinéir an chóipchirt orthu, agus d'fhéadfadh sé gur athchóiríodh iad, chun críche an mheasúnaithe, gan cead na n-údar a fháil roimh ré. Ullmhaíodh an scrúdpháipéar seo de réir Alt 53(5) den *Acht um Chóipcheart agus Cearta Gaolmhara, 2000*. Ní údaraítear aon úsáid dá éis chun aon chríche ach amháin chun na críche dá bhfuil sé beartaithe. Ní ghlacann an Coimisiún aon dliteanas as sárú ar bith ar chearta tríú páirtí a eascraíonn as dáileadh ná as úsáid neamhúdaraithe an scrúdpháipéir seo.

Scrúdú na hArdteistiméireachta – Ardleibhéal

# Matamaitic Páipéar 1

Dé hAoine 9 Meitheamh

Tráthnóna 2:00 - 4:30